***Equation différentielle***:

Niveau : 4eme maths ou sc ex

***BUT***: la résolution de deux types d’équations d’inconnue une fonction à variable réelle

***SEANCE n°1 : une heure et demie***

***Définition et vocabulaire et notation*** :

Activité 1 page 190 (livre scolaire) :



Vocabulaire :

* Soit a un réel et soit l’équation E : y’=ay où y est une fonction inconnue de E ; E est dite équation différentielle linéaire de premier ordre à coefficients constants ; elle est différentielle parce que figurent des dérivées de la fonction inconnue ; elle est linéaire car n’interviennent que y ou y’ et non pas y2 ou siny ,… ;de premier ordre parce que figure seulement y et sa dérivée première y’
* Résoudre l’équation E dans IR c’est trouver toutes les fonctions dérivables sur IR vérifiant E
* Quel est l’ensemble des solutions de E ?

THEOREME

1. Soit a un réel

L’ensemble des solutions de y’=ay est l’ensemble des fonctions f définies sur IR par f(x)=keax où k est un réel pour chaque valeur de k on obtient une solution (a est une constante donnée)

Démonstration :

Soit g une solution de E et h la fonction définie par

h est dérivable sur IR et

d’où h est une constante sur IR , donc il existe une constante k dans IR tel que h(x)=k par suite g(x)=

Inversement

Soit donc la fonction f vérifie l’équation y’=ay

***Activité 4page 191 :***

1) a) l’équation se ramène à

b); donc l’unique solution f de E vérifiant f(0)=

Est définie par

* La solution devient unique si la fonction prend la valeur y0 pour x0 donné
* Théorème :

Soit a un réel non nul pour tout couple réel

Activité 5page 192 :

Le problème revient à déterminer la fonction f vérifiant :

Donc

***Séance n 2 : une heure et demie***

***L’équation différentielle :*** y’=ay+b

Activité 1 page 192:

1)

2) g est une solution de E sig g’=sig

Sig h est une solution de l’équation de y’=2y

3)

Théorème :

L’ensemble des solutions de y’=ay+b est l’ensemble des fonctions définies sur IR par f(x)=k eax où k est un réel et a non nul

Voir la démonstration page 193

* Activité 2 page 193

1. et y(0)= sig et k=

***Séance n° 3 : une heure et demie***

Equation différentielle du type : y’’+ où est un réel

1. Rappel : l’expression

Peut s’écrire et

Activité 1 page 194 :

1)b)f’’(x)+f(x)=0

2) g(x)= ; g’’(x)+4g(x)=0 pour tout x

Vocabulaire : Equation différentielle du type : y’’+ où est un réel

Est linéaire du second ordre à coefficients constants

Théorème :

L’ensemble des solutions de y’’+ est l’ensemble des fonctions définies sur IR par f(x)=

Où est une constante donnée

* Activité 4 page 196 :

1. alors a et b vérifient d’ou
2. + et

* Activité 6 page 197 :

1. Les solutions de E sont les fonctions définies sur IR par f(x)=acos3x+bsin3x
2. a=b= alors

***Exercices corrigés :***

***Exercice n°1 :***

On donne les équations E : y’=3y et E’ :y’=2y

a) résoudre les équations E et E’

b) soit f la fonction définie sur IR par où

Déterminer l’expression de f(x) sachant que f(0)=et

***Exercice n 2 :***

On considère dans IR l’équation différentielle E : y’

On désigne par g une fonction solution de E dont la courbe passant par les points A(0 ;1 ) et B’(1 ;0) le repère choisi est orthonormé

1. Montrer que g’(0)=1 et g’(1)=
2. On suppose que g est positive sur [0 ;1] ;calculer l’aire A de la partie du plan limitée par la courbe C de g et les droites d’équations x=0,x=1 et y=0

***Exercice n°3***

1) Résoudre dans IR l’équation E : y’=

2) Soit E’ :1+y’=3

a) déterminer une fonction constante solution de E’

b) soit f une fonction dérivable sur IR on pose

Montrer que f est une solution de E’ si et seulement si g est une solution de E

c) en déduire l’ensemble des solutions de E’

***\* Correction des exercices*** :

Exercice n °1 :

1. L’ensemble des solutions de E est formé par les fonctions définies sur IR par x   
   L’ensemble des solutions de E’ est formé par les fonctions définies sur IR par x
2. La condition f(0)=

La condition

par suite

Exercice n°2 :

1. La courbe C de g passe par A et B si et seulement si g(0)=1 et g(1)=0 ; comme donc g’(0)=2g(0)

Et

1. A=

Exercice n 3 :

1. L’ensemble des solutions de E est formé par les fonctions définies sur IR par
2. a)h(x)=a où a est une constante réelle

h est une solution de E signifie

h(x)=ln3 pour tout x dans IR

b)f est une solution de E sig

sig g est une solution de E

c)g(x)==sig f(x)=

L’ensemble des solutions de E ‘ est formé par les fonctions définies sur IR par :