LYCEE DAR CHAABENE ☆☆☆☆ DEVOIR SYNTHESE N°3 ☆☆☆☆ EPREUVE : MATHEMATIQUES	SECTION : 4ème Sciences 3
	PROF : Mme Besma
	Durée : 3h. — Date : 18 / 05 / 2019

EXERCICE N°1 : (5 points)

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le temps en seconde des records mondiaux de l'épreuve d'athlétisme du cent mètres masculin.

On désigne par (X,Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le record.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
X	0	12	21	30	64	83	91	99
Y	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

On donnera toute les valeurs arrondies à 10^{-3} prés.

1°) a) Déterminer le coefficient de corrélation $r(X,Y)$. Interpréter le résultat.

b) Déterminer une équation de la droite de régression Δ de Y en X.

c) Quel record du cent mètres peut-on prévoir en 2020 ?

2°) Après étude, on choisit de modéliser la situation par un autre ajustement.

On pose alors $X' = e^{-0.00924X}$ et $Y' = \ln(Y)$.

Les valeur de X', arrondies à 10^{-3} prés et les valeurs de Y', arrondies à 10^{-2} sont données dans le tableau qui suit :

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
X'	1,000	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
Y'	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

a) Déterminer le coefficient de corrélation $r(X',Y')$. Interpréter le résultat.

b) Déterminer une équation de la droite de régression Δ' de Y' en X'.

c) En déduire que l'on peut modéliser une expression de Y en X sous la forme suivante :

$Y = e^{\left(ae^{-0,00924X+b}\right)}$ où a et b sont deux réels à déterminer.

d) A l'aide de cet justement quel record du cent mètres peut-on prévoir en 2020 ?

e) Calculer $\lim\limits_{X\to+\infty} e^{\left(ae^{-0,00924X+b}\right)}$.

f) Que peut-on conclure, en utilise ce modèle, quant aux records du cent mètres masculin, à très long terme ?

EXERCICE N°2 : (5 points)

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le WIFI. Sur l'ensemble des téléphones portables :

40% possèdent l'option GPS.

70% possèdent l'option WIFI.

Parmi les téléphones qui possèdent l'option GPS, 60% possèdent l'option WIFI.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque.

On note : G l'évènement « le téléphone possède l'option GPS »

W l'évènement « le téléphone possède l'option WIFI »

1°) a) Calculer la probabilité qu'un téléphone possède les deux options.

b) Montrer que $p\left(W/\overline{G}\right)=\dfrac{23}{30}$

c) Construire un arbre pondéré représentant la situation.

d) On choisit un téléphone avec l'option WIFI. Quelle la probabilité qu'il possède l'option GPS.

2°) Le coût de revient par téléphone d'une option, pour le fabriquant de téléphone, est de 12 dinars pour l'option GPS et de 6 dinars l'option WIFI.

Soit X la variable aléatoire qui donne coût de revient des options possédées par un téléphone.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique et interpréter le résultat

3°) La durée de vie d'un téléphone portable de cette marque, exprimée en année, avant la première panne est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,3.

a) Calculer la probabilité qu'un téléphone portable ne tombe pas en panne avant deux ans.

b) Un commerçant veut commander des téléphones portables de cette marque.

Combien devrait-il commander pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne tombe pas en panne avant deux ans soit supérieur à 0,99 ?

EXERCICE N°3 : (4 points)

On donne ci-contre la représentation graphique (ζ) de la fonction f solution de l'équation différentielle (E) : $y'+y=0$

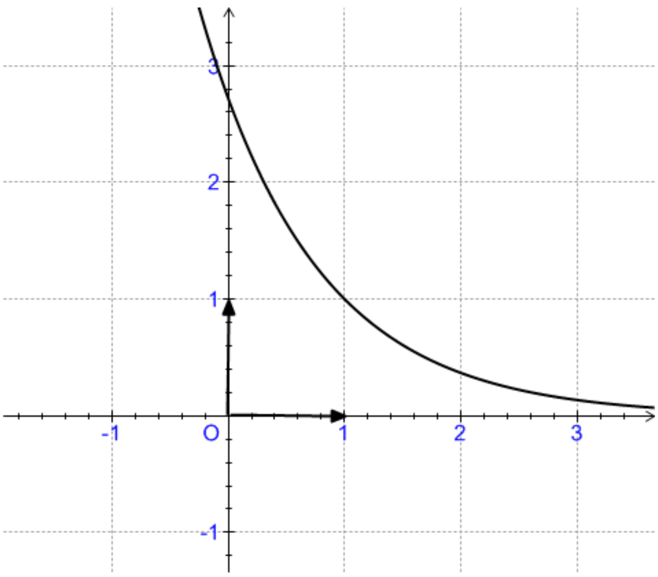
1) Résoudre l'équation (E) puis montrer que $f(x)=e^{1-x}$

2) a) Prouver que la restriction de f à l'intervalle [0,1] réalise une bijection de [0, 1] sur [1, e].

(On note f^{-1} la fonction réciproque de f)

b) Vérifier que pour tout $x\in[1,e]$

$f^{-1}(x)=1-\ln x$



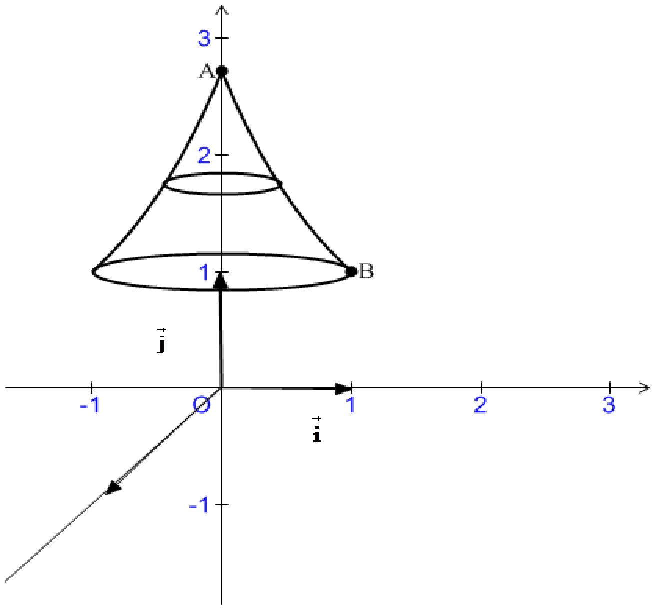
3) Soient A et B les points de (ζ) d'abscisses respectives 0 et 1. On considère le solide (S)

obtenu par la rotation autour de l'axe des ordonnées de l'arc AB comme l'indique le graphique ci-dessous. On note ϑ le volume (en unité de volume) de (S).

a) Montrer que : $\int_1^e (1-\ln x)dx = e-2$

b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\int_1^e (1-\ln x)^2 dx = -1+2\int_1^e (1-\ln x)dx$

c) En déduire ϑ



EXERCICE N°4 : (6 points)

I– On considère la fonction *f* définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}\, e^{1-x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (unité graphique : 2cm)

1°) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, (On pourra écrire $f(x)=\frac{e}{\sqrt{x}}\times\frac{x}{e^x}$).

Interpréter graphiquement le résultat.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Montrer que pour tout $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\, e^{1-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de *f*.

3°) Construire la courbe C.

II– On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt$.

1°) Interpréter graphiquement u_n.

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4°) Montrer que (u_n) est convergente. Calculer sa limite.

III- On considère la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1°) a) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de F.

2°) a) Montrer que pour tout réel positif t, $t+1 \geq 2\sqrt{t}$.

b) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $F(x) \leq \frac{1}{2}\int_1^x (t+1)e^{1-x}\, dt$.

c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $x \in [1,+\infty[$:

$$\int_1^x (t+1)e^{1-x}\, dt = 3-(2+x)e^{1-x}.$$

d) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$, $0 \leq F(x) \leq \frac{3}{2}$.

3°) On note pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \sum_1^{n-1} U_k$ la somme des $(n-1)$ premier termes de la suite (u_n).

a) Justifier que pour tout $n \in IN^*$, $S_n = F(n)$.

b) Montrer que la suite (S_n) est convergente. Donner un encadrement de la limite de S_n.